数　　　学

平成28年度

入学試験問題

1. 注　意　事　項

(1) 試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見てはいけません。

(2) この問題冊子は14ページあります。

試験中に，問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁および解答用紙の汚れなどに気づいた場合は，手を挙げて，監督者に知らせてください。

(3) 問題冊子の表紙の受験番号欄に受験番号を記入してください。

(4) 解答用紙には，氏名，受験番号の記入欄および受験番号のマーク欄があります。それぞれに正しく記入し，マークしてください。

(5) 問題冊子のどのページも切り離してはいけません。

(6) **計算機能や辞書機能，通信機能などをもつ機器等の使用は禁止します。使用している場合は不正行為とみなします。**

(7) 試験終了後，解答用紙はもちろん，問題冊子も持ち帰ってはいけません。

2. 解答上の注意

解答上の注意は，裏表紙にも記載してあるので，この問題冊子を裏返して必ず読んでください。ただし，冊子を開いてはいけません。また，解答用紙の左下に記載してある「注意事項」も読んでください。

(1) 問題は $\boxed{1}$ ，$\boxed{2}$ ，$\boxed{3}$ の3つの大問があります。

(2) 各問題文中の $\boxed{\text{ア}}$ ，$\boxed{\text{イウ}}$ などの $\boxed{}$ には，数値または符号（ ＋，－ ）が入ります。これらを次の方法で，解答用紙の指定欄に，解答してください。

裏表紙につづく

解答上の注意（つづき）

（i） **ア**，**イ**，**ウ**，…… の1つ1つは，それぞれ，0 から 9 までの数字，または，＋，－ のいずれか 1つに対応します。それらを，**ア**，**イ**，**ウ**，…で示された解答欄にマークしてください。

〔例1〕 $\boxed{\text{ア}}\ \boxed{\text{イウ}}$ に -30 と答えたいときは，

ア	⊕	●	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
イ	⊕	⊖	⓪	①	②	●	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
ウ	⊕	⊖	●	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨

（ii） 分数の形の解答が求められているときは，**既約分数で，分母が正の数になる形で答えてください。**

〔例2〕 $\boxed{\text{エ}}\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ に $-\dfrac{5}{6}$ と答えたいときは，

エ	⊕	●	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
オ	⊕	⊖	⓪	①	②	③	④	●	⑥	⑦	⑧	⑨
カ	⊕	⊖	⓪	①	②	③	④	⑤	●	⑦	⑧	⑨

解答を始めるまえに，つぎの**解答上の注意のつづき**を読みなさい。

解答上の注意のつづき

（i） **分数の形の解答枠に，整数の解答をしたいときは，分母が 1 の分数の形になるように答えなさい。**たとえば， $\dfrac{\boxed{ヤ}}{\boxed{ユ}}$ の解答枠に 2 と答えたいときは， $\dfrac{2}{1}$ と答えなさい。

（ii） 解答枠 $\boxed{}$ に，**解答枠の桁数より少ない桁数の整数を解答したいときは，数字が右づめで，その前を 0 でうめるような形で答えなさい。**たとえば， $\boxed{ヨワ}$ の解答枠に 2 と答えたいときは， 0 2 と答えなさい。ヨ の 0 をマークしないままにしておくと，間違いになります！

（解答上の注意終）

$\boxed{1}$ $\log_{10}2 = 0.3010$， $\log_{10}3 = 0.4771$， $\log_{10}7 = 0.8451$ とする。

（1） $a = 100\log_{10}105$ とするとき，a 以下の最も大きい整数は $\boxed{アイウ}$ である。

（2） 3^{500} は $\boxed{エオカ}$ 桁の数である。また，最高位(先頭)の数字は $\boxed{キ}$ である。

（3） すべての正の整数 n に対して， 3^n の一の位(末尾)の数字は $\boxed{ク}$ 種類ある。3^{500} の一の位の数字は $\boxed{ケ}$ である。

（4） 3^{500} を 60 で割った余りは $\boxed{コサ}$ である。

（5） 2元1次不定方程式 $172x - 53y = 1$ の整数解のうち，x の絶対値が最も小さい解は，$x = -\boxed{シス}$，$y = -\boxed{セソ}$ である。

計　算　用　紙

$\boxed{2}$ $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ とするとき，複素数平面上で

$$\alpha = 3\,(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$\beta = 3\,\{(\cos\theta - \sin\theta) + i(\cos\theta + \sin\theta)\}$$

の表す点を，それぞれ，A，B とする。原点を O とする。また，$\arg z$ は複素数 z の偏角を表すものとし，$-\pi \leqq \arg z < \pi$ の範囲とする。

（1） $\left|\dfrac{\beta}{\alpha}\right| = \sqrt{\boxed{\text{ア}}}$ ，$\arg\dfrac{\beta}{\alpha} = \dfrac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}\pi$，$|\beta - \alpha| = \boxed{\text{エ}}$，

$\arg\dfrac{\beta-\alpha}{-\alpha} = -\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}\pi$ である。

（2） 三角形 OAB の外接円の直径は $\boxed{\text{キ}}\sqrt{\boxed{\text{ク}}}$ である。

（3） $\gamma = -\dfrac{9\sqrt{3}}{\beta}$ で表される点 C が，三角形 OAB の外接円上にあるとする。このとき，

$$\arg\frac{\beta-\gamma}{-\gamma} = \frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}\pi \quad または \quad \arg\frac{\beta-\gamma}{-\gamma} = -\frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}\pi \quad \cdots\cdots①$$

である。① を満たす θ を，小さい順に θ_1，θ_2 とする。このとき，

$$\theta_1 = \frac{\pi}{\boxed{\text{ス}}}, \qquad \theta_2 = \frac{\pi}{\boxed{\text{セ}}}$$

である。

$\theta = \theta_1$ のとき，

$$\alpha = \frac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}}\left(\sqrt{\boxed{\text{チ}}}\ \boxed{\text{ツ}}\ i\right),$$

$$\beta = \frac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}}\left\{\left(\sqrt{\boxed{\text{ナ}}}\ \boxed{\text{ニ}}\ 1\right) + \left(\sqrt{\boxed{\text{ヌ}}}\ \boxed{\text{ネ}}\ 1\right)i\right\},$$

$$\gamma = \frac{\boxed{\text{ノ}}}{\boxed{\text{ハ}}}\left\{\left(\sqrt{\boxed{\text{ヒ}}}\ \boxed{\text{フ}}\ 3\right) + \left(\sqrt{\boxed{\text{ヘ}}}\ \boxed{\text{ホ}}\ 3\right)i\right\}$$

である。ここで，$\boxed{\text{ツ}}$，$\boxed{\text{ニ}}$，$\boxed{\text{ネ}}$，$\boxed{\text{フ}}$，$\boxed{\text{ホ}}$ は，それぞれ，符号 ＋，－ のいずれかである。

計　算　用　紙

$\boxed{3}$ n を 0 以上の整数とし，$f_n(x)=\sin(2^n x)$ とする。各 n に対して，$f_n(x)=f_{n+1}(x)$ を満たす正の x のうち，最小の x を x_n とする。さらに

$$S_n=\int_{x_{n+1}}^{x_n}\{f_{n+1}(x)-f_n(x)\}\,dx$$

とする。

(1)　$x_0=\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}\pi$，$x_1=\dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}\pi$，$x_2=\dfrac{\boxed{オカ}}{\boxed{キク}}\pi$ である。

(2)　$S_0=\dfrac{\boxed{ケ}-\sqrt{\boxed{コ}}}{\boxed{サ}}$，$S_1=\dfrac{\boxed{シ}-\sqrt{\boxed{ス}}}{\boxed{セ}}$ である。

(3)　$S_n<\dfrac{1}{100}$ となる最小の n の値は $\boxed{ソ}$ である。

(4)　$\displaystyle\int_0^{x_0}\{f_0(x)\}^2\,dx=\frac{\boxed{タ}}{\boxed{チ}}\pi-\frac{\sqrt{\boxed{ツ}}}{\boxed{テ}}$ である。

(5)　$\displaystyle\int_0^{x_0}f_0(x)f_1(x)\,dx=\frac{\sqrt{\boxed{ト}}}{\boxed{ナ}}$ である。

(6)　曲線 $y=f_{n+1}(x)-f_n(x)$ $(0\leqq x\leqq x_n)$，x 軸，および直線 $x=x_n$ で囲まれた図形を x 軸のまわりに1回転してできる立体の体積を V_n とする。このとき，

$$V_0=\frac{\boxed{ニ}}{\boxed{ヌ}}\pi^2-\frac{\boxed{ネ}}{\boxed{ノハ}}\sqrt{\boxed{ヒ}}\,\pi,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}V_n=\frac{\boxed{フ}}{\boxed{ヘ}}\pi^2-\frac{\boxed{ホ}}{\boxed{マ}}\sqrt{\boxed{ミ}}\,\pi$$

である。